

UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO – Engenharia Mecânica - ITec Disciplina MEC041 - Trabalho Final de

Graduação II



ANÁLISE ESTRUTURAL DO CHASSI DE UM SEMIRREBOQUE DO TIPO CARREGA TUDO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Autor 1 – Joel Vinícius Marmentini – junho de 2024 181722@upf.br

Autor 2 – Dr. Fábio Goedel / Simulação goedel@upf.br

Comissão Examinadora - Dr. Márcio Walber, Me. Guilherme Reschke do Nascimento

RESUMO

Este trabalho visou efetuar uma avaliação a respeito de uma análise estática linear da estrutura do chassi de um semirreboque do tipo Carrega Tudo, por meio de simulações computacionais. Desenvolveu-se um modelo tridimensional de um chassi criado com o auxílio do software CAD (Computer-Aided Design SolidWorks®). Posteriormente, este modelo serviu como base para simulações da estrutura do veículo, conduzida com o software ANSYS® WorkBench. As análises foram feitas aplicando o princípio do Método dos Elementos Finitos. Foram estudadas diferentes condições de análise para avaliar as tensões e deformações na estrutura do chassi. O objetivo principal foi identificar pontos críticos de tensão que surgiriam na busca pela condição mais crítica. Os resultados demonstraram que o semirreboque possui uma margem de segurança considerável para a análise com a carregadeira CAT 416F2 acoplada. Em análises que se atingiu condições críticas do equipamento, surgiram áreas de alta concentração de tensão, como em uma análise que se considerou uma aceleração de 2G simulando uma carga de impacto e em uma análise avaliando o chassi sob a condição de terreno de ladeira. Nas análises críticas, as tensões máximas foram de 545 MPa com um fator de segurança de 0,63 e 437 MPa com um fator de segurança de 0,78, respectivamente. Este estudo destacou a importância da análise estrutural no desenvolvimento de veículos de transporte. Ainda, sugeriu-se futuros estudos experimentais para validar e aprimorar as simulações computacionais.

Palavras-chave: Análise Estrutural, Método dos Elementos Finitos, Semirreboque, Simulação Computacional.

1 INTRODUÇÃO

O transporte de maquinários pesados é uma atividade vital em diversas indústrias, desempenhando um papel crucial no desenvolvimento econômico e na infraestrutura global. No primeiro semestre do ano de 2022, o setor registrou um notável crescimento de aproximadamente 38% no volume de carga transportada em rodovias, em comparação com o mesmo período em 2021 [FRETEBRAS, 2022].

Os resultados do balanço também indicam um movimento financeiro de R\$ 49 bilhões, contribuindo para um aumento de 2,1% no Produto Interno Bruto (PIB) em relação ao ano anterior.

Destaca-se que o transporte de máquinas e equipamentos foi uma das áreas que apresentou um expressivo crescimento, representando 10,9% da distribuição total pela malha rodoviária brasileira, conforme é ilustrado na Tabela 1 [FRETEBRAS, 2022].

Produto	Representatividade do produto no total de fretes da indústria	Variação de volume de fretes 1° sem. 2021 x 2022	Variação de representatividade 1° sem. 2021 x 2022
Alimentícios	18,7%	+49,8%	+1,5 p.p
Máquinas- Equipamentos	10,9%	+32,1%	-0,5 p.p
Siderúrgicos	9,3%	+9,5%	-2,4 p.p
Reciclagem	7,6%	+72,3%	+1,5 p.p
Papel-celulose	5,0%	+23,3%	-0,6 p.p

Tabela 1 - Produtos mais transportados na indústria.

Fonte: FRETEBRAS, 2022.

Estes equipamentos, frequentemente utilizados em setores como construção, mineração e agricultura, são essenciais para o desenvolvimento econômico e infraestrutural. O transporte adequado dessas máquinas, que muitas vezes apresentam dimensões e pesos significativos, requer veículos especialmente projetados [FRETEBRAS, 2022].

A eficácia no desenvolvimento de novos produtos no setor automotivo está vinculada à adoção de inovações tecnológicas e conceitos avançados, que otimizam o processo de design. A implementação de soluções computacionais é um aspecto crucial dessa otimização, visto que contribui para a diminuição de despesas e tempo necessário para o desenvolvimento e introdução de novos produtos no mercado. Essas ferramentas permitem a antecipação e a simulação do desempenho dos sistemas mecânicos dos veículos, facilitando a previsão de possíveis comportamentos e resultados [ROCHA, 2004].

Portanto, realizar a análise estrutural de um veículo é crucial para assegurar sua segurança e confiabilidade. Essa avaliação pode ser efetuada por meio do *software ANSYS*®, que se fundamenta no Método de Elementos Finitos (MEF). Este método baseia-se na subdivisão da geometria do objeto em elementos finitos menores, interligados por pontos nodais, criando assim uma rede ou malha. Segundo Alves Filho (2009), o MEF é capaz de facilitar a solução de questões consideradas complexas por meio de aproximações numéricas.

Dessa forma, o estudo e aperfeiçoamento destes veículos, especificamente na análise estrutural, tornam-se áreas de interesse vital, tanto do ponto de vista da engenharia quanto da operação logística. Este trabalho foca na análise estrutural de um semirreboque adequado para o transporte eficiente e seguro de maquinários pesados, abordando questões como distribuição de carga e resistência estrutural.

A seguir será estabelecido a justificativa para a realização deste trabalho. Ela se sustentará em descrever em detalhes o problema que se busca resolver.

1.1 Justificativa e descrição do problema

O transporte rodoviário de cargas representa um pilar crucial para a logística e economia, especialmente no Brasil, onde predomina o escoamento de produtos agrícolas e industriais, conforme visto na seção anterior. A eficiência e segurança dessas operações são fortemente

dependentes da integridade e desempenho dos veículos utilizados, particularmente os semirreboques do tipo Carrega Tudo [FRETEBRAS, 2022].

Este trabalho foca no uso de uma metodologia para simulação e análise estrutural do chassi de um semirreboque, visando abordar a carência de métodos eficazes que considerem a realidade das condições de operação e deterioração da malha viária brasileira. A necessidade de veículos mais leves, duráveis e confiáveis, frente à intensa concorrência de mercado e às severas condições de transporte, motiva a busca por soluções inovadoras em design e análise estrutural [PERES, 2006].

PERES (2006) descreve que tradicionalmente, o desenvolvimento de produtos no setor de implementos rodoviários baseava-se em métodos empíricos e na experiência prévia, sem a utilização de ferramentas de simulação para otimizar o design e a eficiência estrutural. Essa abordagem resultava em produtos superdimensionados e mais pesados do que o necessário, comprometendo a eficiência operacional e a competitividade no mercado.

A negligência em relação à fadiga do material e à análise detalhada do comportamento sob cargas variáveis pode acelerar o processo de degradação, comprometendo a segurança e a vida útil do semirreboque. A falha em aderir rigorosamente às normas de projeto, muitas das quais são estabelecidas considerando condições ideais muito diferentes das encontradas nas estradas brasileiras, expõe os semirreboques a riscos aumentados de falhas estruturais. As normas internacionais, por exemplo, podem não contemplar a severidade das cargas dinâmicas impostas por pavimentos em condições precárias, comuns em muitas regiões [PERES, 2006].

A revisão destes conceitos, impulsionada pela globalização e pela necessidade de veículos mais leves e com maior durabilidade, evidencia a importância de integrar simulações e análises estruturais no processo de desenvolvimento de veículos como os semirreboques, superando a falta de mão de obra especializada e estabelecendo métodos confiáveis para a obtenção de resultados precisos.

Em vista disso, a metodologia deste trabalho visa realizar uma análise conceitual para entendimento do comportamento da estrutura de um semirreboque Carrega Tudo e possibilitar a definição e verificação se o conceito estrutural está adequado.

Na próxima seção será feita a abordagem objetiva do presente trabalho, caracterizando os caminhos que o mesmo irá seguir ao decorrer do desenvolvimento.

1.2 Objetivos

Este trabalho visa realizar uma análise computacional linear estática para investigar o comportamento estrutural de um semirreboque tipo Carrega Tudo utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF).

Dentre os objetivos específicos, estão:

- Desenvolver e apresentar um modelo numérico do chassi do semirreboque, utilizando o *software ANSYS*® *WorkBench* para a simulação;
- Identificar e analisar as principais condições de contorno que afetam o chassi sob diversas condições de carga e uso;
- Executar análises estruturais estáticas por meio do Método de Elementos Finitos para avaliar as tensões, deformações e rigidez do chassi sob as cargas aplicadas;
- Estudar as condições críticas do equipamento avaliando a distribuição de tensões ao longo do chassi sob estas diferentes condições de carga.

Estabelecidos os objetivos, o próximo tópico irá se tratar do embasamento teórico do presente trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção serão exploradas abordagens a respeito dos assuntos que permeiam a contextualização do trabalho, como o Método dos Elementos Finitos e suas etapas, proporcionando uma visão abrangente das teorias e contribuições que moldaram o entendimento atual da temática.

2.1 O Transporte rodoviário

O transporte de cargas no Brasil é fortemente dependente do modal rodoviário. Embora o governo federal tenha aumentado os investimentos em outros modais, o transporte rodoviário ainda representa a maior parte da movimentação de cargas no país, abrangendo quase 63% do total de TKU (toneladas por quilômetro útil) [ABCR, 2011].

Em 2023, o mercado de frete e logística no Brasil foi estimado em aproximadamente R\$ 548 bilhões e projeta-se um crescimento com uma taxa anual composta de 4,92% até 2030. Os serviços de correio, expresso e encomendas estão entre os segmentos de mais rápido crescimento no setor de logística. No que se refere ao transporte rodoviário de cargas, que é uma parte significativa do setor de transportes do Brasil, há um esforço concentrado para melhorar a eficiência energética e reduzir a pegada de carbono. O setor de transportes é responsável por uma parte substancial do consumo final de energia do país, com o transporte de cargas sendo fortemente dependente de veículos pesados movidos a diesel. Iniciativas estão sendo implementadas para diminuir a intensidade energética, o que pode beneficiar a demanda por energia, a qualidade do ar e as emissões de gases de efeito estufa. [IEA, 2023].

Historicamente, a linha de veículos de semirreboques proporcionou margens de lucro significativas aos fabricantes, dada sua demanda mais restrita, decorrente de aplicações específicas. A baixa concorrência nacional na produção dos semirreboques acentuou ainda mais essa característica. No entanto, a ligação entre a infraestrutura rodoviária deficiente e a eficiência desses veículos é evidente. A crescente demanda por soluções de transporte eficientes e sustentáveis tem impulsionado discussões sobre como otimizar a operação desses reboques e adaptá-los às condições desafiadoras das estradas brasileiras [KOHLER, 2018].

Dito isto, será apresentada na sequência uma abordagem normativa relacionada ao controle do peso e dimensionamento destes veículos.

2.2 Regulamentações para o transporte de cargas pesadas

Criado em 1967 por meio do Código de Trânsito Brasileiro (CTB), O CONTRAN (Conselho Nacional de Trânsito) é responsável por estabelecer as diretrizes e regulamentos técnicos para o trânsito e o transporte terrestre no Brasil [CONTRAN, 2006].

2.2.1 Resolução Nº 211 do CONTRAN

Conferido ao artigo 12 do CTB, instituiu-se na resolução Nº 211 artigos pertinentes ao dimensionamento de veículos de carga. No que diz respeito de reboques e semirreboques, estabelece que os implementos que não necessitam de AET (Autorização Especial de Trânsito) devem ter: largura máxima: 2,60 metros; altura máxima: 4,40 metros; Peso Bruto Total Combinado (PBTC) não deve exceder 39,5 toneladas (Ton); O comprimento deve ser superior a 19,8 metros e máximo de 30 metros quando o PBTC for menor ou igual a 67Ton;

Dessa forma, conforme a resolução do artigo Nº4 do CONTRAN – Capítulo III: Dos Limites de Dimensões e Pesos, seção I, o comprimento total deve ser medido do ponto mais avançado da sua extremidade dianteira até o ponto mais avançado de sua extremidade traseira incluindo acessórios não previstos de exceção [CONTRAN, 2006].

A partir disto, tratando-se de uma norma específica de peso máximo por eixo, na próxima seção será apresentado uma resolução que tange a este tema.

2.2.2 Resolução DNIT nº 1 de 08/01/2021

Pelo fato dos semirreboques Carrega Tudo serem destinados ao transporte de cargas indivisíveis e excedentes em peso ou dimensões, o CONTRAN, juntamente com o Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT), estabeleceram diretrizes para a fiscalização do excesso de peso nestes veículos e combinações. O artigo abaixo foi retirado do escopo da norma.

"§ 1º No dimensionamento do conjunto transportador, deverá ser considerado o veículo ou combinação de veículos que apresente dimensões finais, incluindo largura, altura e comprimento, e distribuição de peso por eixo, dentro do especificado por esta Resolução, bem como, que ofereça as melhores condições para acomodação da carga, apoio e sua fixação, garantindo a segurança na operação do transporte." (DNIT, Resolução Nº1, de 8 de janeiro de 2021, página 7 - Art. 5°).

O Quadro 1 1 destaca as categorias de veículos e suas respectivas configurações de eixos, juntamente com os limites máximos de peso por eixo associados.

Categoria de Veículo	Configuração de Eixos	Peso Máximo por Eixo (toneladas)
Veículos com suspensão mecânica, hidropneumática ou pneumática	Eixos isolados com 2 pneumáticos por eixo	7,5ton
Veículos com suspensão mecânica, hidropneumática ou pneumática	Eixos isolados com 4 pneumáticos por eixo	12ton
Veículos com conjunto de dois ou mais eixos com suspensão e direção hidráulica	Eixos isolados com 8 pneumáticos por eixo (distância entre eixos de 1,35m a 1,50m)	11,3ton
Veículos com conjunto de dois ou mais eixos com suspensão e direção hidráulica	Eixos isolados com 8 pneumáticos por eixo (distância entre eixos de 1,50m a 2,40m)	12ton
Veículos do tipo guindaste	Eixos isolados com 2 pneumáticos convencionais por eixo	10ton
Veículos do tipo guindaste	Conjunto de 2 eixos, direcionais ou não, sem tandem (distância entre eixos de 1,35m a 2,40m)	15ton

0	1	1	<i>r</i>	T 1 1	1		<i>·</i> ·		•
(luadro.		- ·	Labelas	de	neso	máximo	nor	e1x0
Š	uuuio	1		I uoolus	uv	peso	manno	por	ULAO.

Fonte: DNIT (2021) - Adaptado.

Nas próximas seções serão abordadas condições referentes ao Método dos Elementos Finitos e técnicas de análises estruturais e suas abordagens, apresentando os conceitos críticos para o entendimento da base teórica do presente trabalho.

2.3 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Inicialmente, o MEF surge com uma iniciativa da NASA no final da década de 1970 e início dos anos 1980. O objetivo era desenvolver e testar o desempenho de um computador paralelo especificamente projetado para análises estruturais. Dessa forma, o MEF é descrito como um método aproximado de solução de equações diferenciais, usado para modelar e resolver problemas onde soluções exatas são difíceis ou impossíveis de obter. O método trabalha discretizando um sistema contínuo (com número infinito de variáveis desconhecidas) em um número finito de variáveis, simplificando o problema para uma forma mais gerenciável [ZIENKIEWICZ, 2000].

A Figura 1 exemplifica as etapas em que são conduzidas as metodologias que compõem o processo de uma análise de elemento finito – na língua inglesa FEA (*Finite Element Analysis*).



Figura 1 - Estágios básicos na análise de elementos finitos.



Partindo da fase inicial, o problema físico é convertido em um modelo matemático, definindo equações de equilíbrio, condições de contorno e propriedades dos materiais. Após, o modelo contínuo é dividido em um número finito de elementos menores, como o "Modelo FEA" na Figura 1. Tratando-se da etapa de resolução numérica, as equações do sistema discreto são resolvidas para encontrar as respostas do modelo, como tensões, deformações e deslocamentos. A resolução é feita pelo *software*, como mostrado na imagem final da Figura 1, onde as cores indicam diferentes níveis de tensão [ZIENKIEWICZ, 2000].

Dentro do método, as estruturas são tipicamente divididas utilizando elementos de malha ou elementos que se conectam continuamente. Em elementos de malha, como vigas contínuas, pórticos, etc. a interação entre os componentes ocorre somente através de juntas ou nós, com a força atuando exclusivamente nestes pontos. Em contrapartida, nos elementos continuamente conectados, como os de formas triangulares ou quadriláteros, as interações não se limitam aos nós e podem incluir partes compartilhadas dos elementos, como arestas [ALVES FILHO, 2009].

No próximo tópico será abordado as técnicas que circundam a análise de sistemas de estruturas.

2.4 Análise de sistemas estruturais

É imperativo tratar cada problema estrutural como um objeto distinto de análise. Após o reconhecimento do problema real e a identificação de suas características físicas, deve-se desenvolver uma estratégia para idealizar um modelo representativo da estrutura. Essa modelagem deve refletir o comportamento real da estrutura com precisão adequada. Uma abordagem comum é subdividir a estrutura em elementos ou subconjuntos menores, facilitando a compreensão do comportamento global a partir do comportamento dos elementos individuais. Essa metodologia

divide os sistemas em duas categorias principais para fins de modelagem: sistemas contínuos e sistemas discretos [OLIVEIRA, 2007].

Nos sistemas contínuos, a solução é buscada para infinitos pontos dentro da estrutura através de formulações matemáticas. Esses modelos enfrentam complexidades significativas que muitas vezes superam a viabilidade das soluções analíticas devido à natureza complicada das equações diferenciais envolvidas [OLIVEIRA, 2007].

Segundo OLIVEIRA (2007), no contexto de sistemas discretos, a aplicação de diagramas de corpo livre é crucial, pois permite derivar as equações de equilíbrio para um corpo específico. A discretização de uma estrutura envolve dividir a estrutura em elementos finitos interconectados por nós, facilitando a análise através de equações algébricas simultâneas resolvidas por métodos matriciais. Os elementos finitos utilizados podem variar em tipo e geometria, incluindo sólidos, cascas e elementos de barra, cada um com propriedades definidas para assegurar que a resposta do modelo se alinhe precisamente com o comportamento real da estrutura.

Ao analisar um sistema, é essencial que o projetista compreenda tanto o conjunto quanto seus componentes individuais e suas interconexões. Por exemplo, em uma estrutura reticulada como uma treliça plana, é relativamente simples identificar os elementos de barra e entender que a interação entre os elementos ocorre exclusivamente nas juntas ou nós [ALVES FILHO, 2009].

A seguir será abordado o processo do refinamento de uma casca de um modelo numérico de um elemento, mais conhecida como Malha.

2.5 Refinamento de malha

No âmbito dos elementos finitos, a malha representa a divisão do domínio de um elemento de um sistema. Por costume, uma malha que não é suficientemente refinada pode não se aproximar da solução analítica, ao passo em que uma malha muito refinada pode aumentar de forma desnecessária os custos computacionais da análise [DE TROYA; TORTORELLI, 2018].

Sabe-se que, em geometrias complexas, o número de nós de um elemento é diretamente relacionado com a proximidade de uma solução verdadeira em uma análise por MEF. Quanto maior o número de nós, maior a proximidade com uma solução exata [FISH; BELYTSCHKO, 2009].

A Figura 2 exemplifica dois tipos de malha que podem ser geradas, dependendo do grau de refinamento da mesma.

Figura 2 - Tipos de malha de acordo com o grau de refinamento por MEF.



Fonte: FISH; BELYTSCHKO, 2009 – adaptado.

A partir disto, torna-se necessário entender as variáveis de análises estáticas lineares no cálculo de tensões e reações de sistemas, assuntos que serão tratados no próximo tópico.

2.6 Análise estática linear

Quando forças externas são aplicadas a um objeto, ele se deforma, e esse efeito se propaga por toda a sua estrutura. Tais forças externas induzem tensões e reações internas que ajudam o objeto a voltar ao equilíbrio. A análise estática linear, por sua vez, é usada para calcular deslocamentos, deformações, tensões e forças reativas sob a influência dessas cargas [DUARTE FILHO, 2002].

Dessa forma, a análise se baseia em duas hipóteses: estática e de linearidade, conforme o Quadro 2.

Hipótese estática	As cargas são aplicadas de maneira progressiva e suave até alcançarem seu valor máximo. Após isso, se mantêm estáveis, sem variações ao longo do tempo, possibilitando a exclusão de forças de inércia e amortecimento que são mínimas devido a acelerações e velocidades desprezíveis. Cargas que mudam ao longo do tempo e resultam em significativas forças de inércia ou amortecimento podem necessitar de uma análise dinâmica. Estas cargas dinâmicas variam com o tempo e frequentemente provocam forças de inércia e amortecimento que não podem ser ignoradas.
Hipótese de linearidade	A relação entre as cargas aplicadas e as respostas resultantes do modelo é diretamente proporcional. Ao dobrar as cargas, as respostas do modelo, como deslocamentos, deformações e tensões, também dobrarão. A linearidade dessa relação é garantida se os materiais utilizados no modelo seguirem a Lei de Hooke, que estipula que a tensão é diretamente proporcional à deformação, garantindo-se que as cargas devem manter sua magnitude, direção e distribuição constantes e não devem mudar enquanto o modelo está sendo deformado.

Quadro 2 – Tipos de hipóteses para a análise linear estática.

Fonte: SOLIDWORKS Help, 2016 - adaptado.

Dito isto, na próxima seção será explorado conteúdos relacionados aos graus de liberdade e restrições de movimento de corpos tridimensionais.

2.7 Graus de liberdade

Os graus de liberdade definem-se como os deslocamentos e rotações possíveis em um ponto de um corpo sujeito a deslocamentos e deformações. Em um ponto no espaço, podem ser considerados seis graus de liberdade: três deslocamentos lineares e três rotações. Para a análise estrutural estática de um veículo, esses graus de liberdade são essenciais para modelar e entender o comportamento do veículo sob cargas estáticas [AZEVEDO, 2003].

A Figura 3 exemplifica como os movimentos de um corpo podem se comportar, ficando claro como as mesmas podem ser restringidas.

Figura 3 - Graus de liberdade no espaço tridimensional.



Fonte: AZEVEDO, 2003 – adaptado.

Cada ponto nodal do modelo estrutural de um veículo terá seis graus de liberdade que precisam ser considerados para determinar como ele responderá a forças externas. Isso inclui a análise de deslocamentos e rotações que ocorrem nas diversas partes de sua estrutura, permitindo uma avaliação precisa da estabilidade e resistência [AZEVEDO, 2003].

No próximo tópico será abordado questões relacionadas a matriz de rigidez, que relaciona aspectos de vetores em uma análise de cargas.

2.8 Matriz de rigidez

Segundo ALVES FILHO (2009), a matriz de rigidez é uma matriz de transformação linear que transforma o vetor dos deslocamentos no vetor das ações. Numerosos componentes de deslocamento e rigidez são comuns em estruturas e comportamentos físicos de materiais. Esses componentes estabelecem relações lineares entre todas as forças externas e deslocamentos nodais.

Em estruturas compostas por um único elemento anexado a um único nó, a aplicação de uma força externa F [N] resulta em um deslocamento U [m]. Essa relação demonstra uma linearidade proporcional, onde F [N.m] está relacionada a U. Quando o elemento é diretamente proporcional à estrutura, a rigidez do elemento se torna proporcional à rigidez da estrutura [ALVES FILHO, 2009]. A equação 1 representa essa relação usando notação matricial.

$$\{F\} = [K] . \{U\}$$
(1)

Onde:

 $\{F\}$ = matriz coluna, representando as cargas nodais;

[K] = matriz de rigidez da estrutura;

 $\{U\}$ = matriz coluna correspondente aos deslocamentos nodais.

Neste ponto do presente estudo, torna-se indispensável o embasamento de tensões e deformações estruturais, as quais tem o respectivo desenvolvimento teórico na próxima seção.

2.9 Deformações

Conforme descrito por FISH; BELYTSCHKO (2009), as deformações em estruturas simuladas pelo MEF são calculadas com base nos deslocamentos nodais. Os principais componentes do tensor das deformações (ϵ) são determinados a partir das derivadas dos deslocamentos (u, v, w) em relação às coordenadas espaciais. A relação entre as tensões e deformações, expressa pela Lei de Hooke, é dada pela equação 2:

(2)

Onde:

- σ é o vetor das tensões (stresses);
- *E* é o módulo de elasticidade do material, que é uma medida da rigidez do material;
- ε é o vetor das deformações (strains);

Essa equação pode ser expandida para incluir os componentes de tensões e deformações ao longo de diferentes direções e em casos tridimensionais. Para problemas tridimensionais, a equação se torna uma relação matricial entre tensões e deformações.

A Lei de Hooke é um princípio fundamental na física que descreve o comportamento elástico de materiais lineares (que voltam à sua forma original quando a força é removida). Esse princípio afirma que a força necessária para esticar ou comprimir um material elástico é diretamente proporcional à variação no comprimento do material, sendo o princípio válido quando está dentro do limite elástico de um material (até o ponto em que o material não sofre deformações permanentes quando a força é removida) [FISH; BELYTSCHKO, 2009].

A equação da Lei de Hooke é expressa na equação 3:

$$F = -\kappa \cdot \Delta L \tag{3}$$

Onde:

- *F* é a força aplicada ao material;
- κ é a constante elástica que caracteriza a rigidez do material;
- ΔL é a variação no comprimento do material em relação ao seu comprimento original;

Dito isto, na próxima seção será explorado conteúdos relacionados a verificação de falhas pelo critério de Von Mises.

2.10 Teoria de Von Mises – verificação de falha por escoamento

O critério de Von Mises, também conhecido como critério da máxima energia de distorção, é amplamente adotado na engenharia para avaliação de materiais dúcteis em software de análise por elementos finitos, como *SolidWorks*® e *ANSYS*®, devido à sua confiabilidade e eficiência. [SOLIDWORKS Help, 2016].

Este princípio foi originalmente formulado por Richard Von Mises, um matemático germano-americano. A condição de escoamento proposta por Von Mises estabelece que a ocorrência do escoamento se dará quando a energia de distorção em um volume unitário alcançar o mesmo valor da energia de distorção desse volume quando submetido a uma tensão uniaxial que atinja a tensão de escoamento [ANSYS, 2010].

Segundo essa teoria, um componente estrutural é considerado seguro quando a energia de distorção por unidade de volume é inferior à energia de distorção por unidade de volume necessária para induzir o escoamento em um corpo de prova feito do mesmo material, sujeito a um teste de tração [SHIGLEY, 2016].

A tensão equivalente de Von Mises para um estado triaxial de tensões é calculada pela equação 4:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}$$
(4)

Onde:

- σ_e é a tensão equivalente de Von Mises;
- σ_1 é a tensão máxima principal;
- σ_2 é a tensão média principal;
- σ_3 é a tensão mínima principal;

Dessa forma, para casos de estado plano de tensão, considera-se o valor da tensão média principal $\sigma_2 = 0$, resultando na equação 5:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2} \tag{5}$$

O fator de segurança por Von Mises (*FS*) é calculado comparando a tensão equivalente de Von Mises (σ_e) com a tensão de escoamento (S_y) do material. A fórmula geral é dada pela equação 6:

$$FS = \frac{S_y}{\sigma_e} \tag{6}$$

Onde:

- S_y é a tensão de escoamento do material;
- σ_e é a tensão equivalente de Von Mises;

Se FS > 1, indica que a estrutura está operando com uma margem de segurança em relação à falha por escoamento. Se FS = 1, a estrutura está no limite da capacidade de carga, e se FS < 1, a estrutura pode estar sujeita a falhas plásticas [SHIGLEY, 2016].

A seguir parte-se para o fechamento do capítulo, resumindo os principais assuntos abordados na revisão bibliográfica.

2.11 Síntese dos estudos revisados

A revisão bibliográfica deste trabalho abordou a análise estrutural de semirreboques do tipo Carrega Tudo utilizando o MEF. Destacou-se a importância do transporte rodoviário de cargas pesadas no Brasil e a necessidade de veículos especialmente projetados para suportar essas cargas. As regulamentações estabelecidas pelo CONTRAN e pelo DNIT são pontos chaves para garantir a segurança e a eficiência desses transportes. O MEF apresenta-se como uma técnica fundamental para a análise estrutural, permitindo simular e prever o comportamento de estruturas complexas sob diversas condições de carga. Utilizando *softwares* como o *ANSYS*® *WorkBench*, é possível conduzir análises detalhadas das tensões e deformações no chassi dos semirreboques, identificando pontos críticos de tensão e sugerindo melhorias no design.

Os estudos de caso revisados demonstram a eficácia do uso do MEF para a análise estrutural de semirreboques, permitindo identificar áreas de alta concentração de tensão e propondo reforços

estruturais necessários. A adesão às normas técnicas e a utilização de ferramentas computacionais avançadas são essenciais para desenvolver veículos de transporte mais seguros e eficientes.

Ao concluir-se este capítulo, é possível evidenciar a diversidade de abordagens e perspectivas adotadas por pesquisadores ao longo do tempo acerca dos assuntos relacionados ao estudo deste artigo. Em vista disso, segue-se para a seção metodológica, a qual é composta pelos métodos utilizados na aplicação dos estudos contextualizados.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, serão apresentadas as fases relacionadas ao desenvolvimento da metodologia do estudo, composta pelo desenvolvimento nas etapas de modelamento estrutural, análise de distribuição de cargas e a análise computacional do chassi do semirreboque.

O propósito deste estudo é conduzir uma análise linear estática para explorar o comportamento estrutural de um semirreboque do tipo Carrega Tudo. Por meio do MEF, pretendese investigar as tensões e forças presentes no chassi sob diferentes condições de contorno, oferecendo um entendimento detalhado das reações mecânicas da estrutura durante o uso.

A Figura 4 apresenta a metodologia adotada no estudo sob a forma de um fluxograma, delineando os diferentes níveis de procedimentos utilizados.

Figura 4 - Fluxograma que guiará os processos do estudo.



Fonte: Autor (2023).

Para uma verificação das demandas para o transporte de máquinas pesadas, será utilizado como exemplo a Retroescavadeira Caterpillar 416 modelo F2 para configurar uma análise de cargas e reações. A Tabela 2 exibe as configurações dimensionais e o peso da retroescavadeira.

Tabela 2 - Características da Retroescavadeira Caterpillar 416F2.

*				
Características	Valores			
Comprimento Total de Transporte	5805 mm			
Altura Total de Transporte (Braço Padrão)	3577 mm			
Envergadura dos Estabilizadores na Posição de Transporte	2322 mm			
Peso Operacional Mínimo	7214 Kg			

Caterpillar 416F2

Fonte: Caterpillar (2023) – adaptado.

Com base nos modelos de semirreboques carrega-tudo disponíveis no mercado, ainda que neste estudo será analisado as condições de carga para uma retroescavadeira, sabe-se que mesmo tem o intuito de transportar todos os tipos de cargas indivisíveis [RANDON, 2023].

A seguir será discutido o material que será utilizado na estrutura do chassi do semirreboque, apresentando suas propriedades relevantes para o estudo.

3.2 Definição do material

O material a ser utilizado na estrutura será o aço ASTM A572 G50. O mesmo possui propriedades dúcteis, sendo capaz de se deformar sob tensão de tração. Possui limite de escoamento de 345MPa e resistência a tração de 400 a 550MPa, torna-se adequado para suportar grandes cargas [HIBBELER, 2012].

A Tabela 3 apresenta os valores comentados tal como demais propriedades mecânicas do material.

Tabela 3 - Propriedades mecânicas do ASTM A572 G50.

Propriedade	Valor
Resistência à tração	400 – 550 MPa
Resistência à tração (rendimento)	345 MPa
Alongamento na ruptura (em 200mm)	20.0%
Módulo de elasticidade	200 GPa
Razão de Poisson	0.260
Módulo de cisalhamento	79.3 GPa
Densidade	$7.85 \frac{g}{cm^3} (0.284 \frac{lb}{in^3})$

Fonte: ALLGAYER (2017).

Dessa forma, o aço ASTM A572 G50 confere uma boa soldabilidade e uma resistência mecânica satisfatória para aplicações em chassi de um semirreboque por conta de seu baixo teor de carbono, evitando o risco de fragilização.

No próximo capítulo será tratado do modelamento CAD do semirreboque, apresentando os perfis utilizados e demais informações.

3.3 Modelamento estrutural do chassi

O chassi do semirreboque foi projetado com base em ajustes que seriam necessários na análise computacional, de maneira que o mesmo fosse um modelo pré-pronto da estrutura que será tratada em elementos finitos, resultando em menores custos computacionais nesta fase de préprocessamento. Dessa forma, apenas os elementos essenciais foram modelados, facilitando o processo de geração de malha e reduzir a carga computacional necessária, não prejudicando os resultados. Por outro lado, um nível excessivo de detalhamento resultaria em um custo computacional consideravelmente mais elevado [PERES, 2006].

A intenção de construir um modelo geométrico mais representativo possível é baseada na ideia de PERES, 2006, no qual enfatiza o uso deste com atribuições simplificadas, mesmo que o Método dos Elementos Finitos permita reproduzir uma geometria perto da exatidão.

Foi utilizado o *software* de modelagem 3D *SolidWorks*® para a confecção do chassi. O Quadro 3 representa a identificação dos componentes estruturais utilizados, com os perfis descritos a partir de suas dimensões, como espessura, altura e largura dos mesmos.

Componentes Estruturais	Perfil e Material (Catálogo Gerdau)	Dimensões (mm)
		Altura (d): 603
Longarinas (W 610 X 101,0)	Perfil "I" aço ASTM A572 G50 A36	Espessura da alma (tw): 10,5
		Largura da aba do perfil (bf): 228
		Altura (d): 403
Travessas Tipo 1 (W 410 X 46,1)	Perfil "I" aço ASTM A572 G50	Espessura da alma (tw): 7,0
		Largura da aba do perfil (bf): 140
		Altura (d): 305
Travessa Tipo 2 (W 310 x 23,8)	Perfil "I" aço ASTM A572 G50	Espessura da alma (tw): 5,6
		Largura da aba do perfil (bf): 101

Quadro 3 – Elementos estruturais configurados ao chassi e suas dimensões.

Fonte: Autor (2023).

Com os perfis definidos, era necessário selecionar o conjunto de suspensão que definiria os pontos de junções ao chassi, transferindo as cargas pelos feixes de mola. Estes pontos definirão as regiões para as aplicações dos pontos de engaste na análise computacional. Contudo, os pontos de fixação são os locais onde as cargas estáticas (peso da carregadeira) são transferidas do chassi para os feixes de mola e vice-versa. A Figura 5 demonstra os locais de suporte que são soldados ao chassi, fixando o conjunto de suspensão do semirreboque.

Figura 5 - Conjunto de suspensão utilizado para aplicação dos engastes das regiões de apoio.



Fonte: Autor (2023).

A Figura 6 exibe o modelo CAD da estrutura com seu peso e, respectivamente a Figura 7 define o detalhamento do projeto do semirreboque, dimensionado conforme a NBR NM-ISSO 337:2000 e a resolução DNIT Nº1 de 08/01/2021. Conforme a Figura 6, o chassi possui aproximadamente uma massa de 4502,13 kg (4,5 toneladas), representando o peso calculado pelo *software SolidWorks*® de forma automática, quando aplicado o aço ASTM A572 G50.

Figura 6 - Modelo CAD do chassi e propriedades de massa.



Fonte: Autor (2023).

Figura 7 - Dimensões da estrutura do chassi com o cavalo mecânico.



Fonte: Autor (2023).

O detalhamento do chassi do semirreboque Carrega Tudo acoplado ao cavalo mecânico Volvo 460 revela um comprimento total de 12588mm, medido desde a extremidade frontal do pescoço até o ponto mais distante do reboque. A plataforma disponível para carga possui um comprimento de 9201mm, refletindo o espaço útil para o transporte de mercadorias. Foi definida uma altura do solo à plataforma de 1145mm.

A altura do pescoço do chassi é estabelecida em 480mm, medida verticalmente do ponto mais baixo da plataforma até o topo do pescoço. A distância entre os eixos do semirreboque é de 1321mm. Já a distância do eixo traseiro do caminhão ao primeiro eixo do reboque é marcada em 9205mm, influenciando a conexão e o alinhamento entre as unidades.

O comprimento do pescoço, que representa a extensão do chassi desde a conexão com o cavalo mecânico até o ponto de início da plataforma, atinge 3387mm.

Com o dimensionamento concluído, na próxima seção será disposto a configuração da condição de equilíbrio, que se refere também a uma análise de distribuição de cargas acerca do semirreboque.

3.3 Análise de distribuição de cargas (estudo estático)

Para a confecção da condição de equilíbrio dos carregamentos e reações existentes na estrutura, era necessário a escolha de um cavalo mecânico a fim de simular uma condição específica e mais próxima de condições reais de aplicação. O cavalo mecânico utilizado consiste em um Volvo FH 460 tração 6x2 traseira, pesando 8760Kg [VOLVO – Catálogo de produtos, 2023].

Em relação à suspenção do semirreboque Carrega Tudo, a mesma possui uma disposição de pneumáticos por eixo de dois conjuntos de suspensão, cada um com capacidade máxima de 12Ton, e considerando os eixos do cavalo mecânico, totalizando 14,5Ton (um rodado simples dianteiro de 6Ton, um rodado simples traseiro de 8,5Ton e dois eixos de rodado duplo).

A partir disto, o cálculo da condição de equilíbrio da análise de cargas operacionais pode ser realizado. O desenvolvimento será apresentado na Figura 8.

Figura 8 - Condição de equilíbrio final para a carga máxima suportada do chassi.



Fonte: Autor (2023).

Com os pesos do chassi, do cavalo mecânico e o peso máximo suportado por cada eixo definidos anteriormente, é possível saber quanta carga ainda pode ser aplicada depois que a retroescavadeira é carregada na plataforma. Em suma, em relação ao peso de carregamento do cavalo mecânico e da própria tara da estrutura, chega-se num valor de 20474kg de força vertical negativa. Considerando neste momento reações positivas acerca do chassi do Carrega Tudo, calcula-se 38500kg.

Portanto, a estrutura deverá suportar 18026 Quilogramas ou 18,026 toneladas de peso adicionais mesmo após a máquina Caterpillar 416 estiver acoplada. Essa conclusão será explorada nas análises estruturais e simulações na seção de resultados.

Por conseguinte, para determinar o limite máximo de carregamento do semirreboque, basta somar o valor do peso da retroescavadeira ao cálculo anterior, totalizando 25240Kg. Este é o carregamento máximo que o semirreboque poderá suportar, referindo-se ao ensaio de carregamento estático nesta etapa de pré-processamento.

A partir disto, é apresentado a seguir o método para a confecção do modelo do chassi do semirreboque para elementos finitos. Também, é descrito as ferramentas que serão utilizadas para gerar a malha do modelo global.

3.4 Modelo numérico do chassi

Importando o modelo geométrico do chassi do semirreboque para o *software ANSYS*® *SpaceClaim*, foram extraídas as superfícies médias de cada componente, utilizando a ferramenta *midsurface* (superfície média) para a preparação das superfícies. Essa ferramenta transforma os perfis sólidos em elementos planos ou elementos de placas, assumindo um menor esforço computacional, mantendo uma melhor qualidade de malha em decorrência do comportamento estrutural de chapas, sendo este método mais viável do que o método de elementos sólidos para estes casos, nos quais uma das dimensões da peça (espessura) é bem menor que as outras duas (largura e comprimento) [LEANDRO, 2019].

Baseando-se nos estudos de PERES (2006), na modelagem das cascas do modelo numérico do Carrega Tudo, os cordões de solda serão considerados de maneira simplificada, optando-se por focar apenas na junção das chapas formadas por esses cordões, representando as soldas com elementos de cascas de forma simplificada. Simplificações serão realizadas no modelo devido à natureza dos elementos usados na sua confecção, permitindo que o mesmo tenha uma menor carga computacional, sem afetar a rigidez da estrutura e demais resultados das análises estruturais, devido ao grau de refinamento que será adotado, o qual garante o modelamento de forma adequada do comportamento da estrutura de forma global e local.

A Figura 9 a) representa a geometria do modelo numérico transformada em elementos de placas. A Figura 9 b) exibe as linhas de conexões entre as superfícies, ambas retiradas do ambiente *SpaceClaim* do *ANSYS*®.

Figura 9 - Estrutura do semirreboque tratada no ambiente SpaceClaim.



a) Chassi em elementos de casca.



b) Representação das conexões das cascas.

Fonte: Autor (2024).

Durante a criação da superfície média dos componentes do chassi, houve falhas entre alguns elementos, necessitando de correções utilizando os recursos do *software CAD*. Nesta fase, foram conectadas as superfícies que não estavam interligadas utilizando representações simplificadas de solda com largura igual a cinta e espessura igual à alma do componente, com comprimentos de 5mm. Isso foi aplicado principalmente nas longarinas principais do chassi.

Também, foram conectados por meio de extensões de superfícies utilizando o comando *Pull* e/ou *Move* nas arestas dos membros que, na geração da superfície média, ficaram com vãos entre eles, não permitindo o reconhecimento das conexões, essenciais para o reconhecimento das

"soldas" de forma simplificada que fazem a união dos componentes, e a geração da malha pelo programa conforme configurações definidas.

Ainda, nos raios de curvatura dos perfis, foram geradas simplificações utilizando o comando *Fill*, para evitar o aumento no número de elementos finitos requeridos, sendo removidos raios que não apresentam influência nos resultados, uma boa prática em modelos de elementos finitos.

Para a geração da malha, será utilizado um grau de refinamento com elementos de tamanho de 10mm de forma global, sendo utilizados elementos finitos do tipo quadrilaterais lineares.

Com o método para geração da malha definido, parte-se para a análise das áreas que serão fixas durante as análises computacionais. Estas, na literatura do presente trabalho, comumente são conhecidas como Regiões de Engaste.

3.5 Regiões de engaste

Criou-se um modelo sólido do pino rei no ambiente *SpaceClaim*, a fim de representar sua fixação através da quinta roda contida na mesa giratória do pescoço do chassi, ao engate quinta roda do cavalo mecânico. Não obstante, criou-se sólidos em formato de chapas para representar as regiões de apoio do conjunto de suspensão.

Conforme ilustrado na Figura 3, um corpo possui seis graus de liberdade de movimento. Para realizar uma análise estrutural precisa, é essencial determinar quais desses graus de liberdade serão restritos e quais serão permitidos.

Os graus de liberdade de rotação são representados pelo prefixo "R" seguido do eixo correspondente, enquanto os graus de liberdade de translação ou deslocamentos são identificados com o prefixo "D" seguido do eixo correspondente. Essa identificação é crucial para definir corretamente as condições de contorno da análise estrutural.

Na região do pino rei, as restrições de rotações foram colocadas como livres nos eixos Rx, Ry e Rz a fim de simular seu comportamento de movimento quando acoplado ao cavalo mecânico, porém as restrições de translações em Dx, Dy e Dz foram fixadas em todos os eixos.

Para o conjunto da suspensão do semirreboque, foram restringidos os movimentos no eixo Dx, com a intenção de fixar o chassi de forma que não houvesse deslocamentos laterais, ficando livre somente em Dy e Dz (sentido da flexão da carga).

A Figura 10 a) representa as regiões de deslocamentos remotos (restrições) aplicadas ao pino rei e a Figura 10 b) representa as restrições aplicadas ao conjunto de suspensão.



Figura 10 - Deslocamentos remotos aplicados como forma de restrição.

a) Engaste do pino rei.



b) Engastes do conjunto de suspensão.

Fonte: Autor (2024).

No ambiente *Workbench* do *software ANSYS*®, conforme a Figura 10 b), pode-se verificar que foram utilizadas representações de molas com coeficiente de rigidez de 1200N/mm cada uma. Este recurso, conforme a ideia de BALESTRERI (2020), permite oferecer um entendimento mais exato do comportamento do chassi em uma análise por MEF. As molas são colocadas nos pontos médios entre as travessas da parte traseira do Carrega Tudo, onde estariam os feixes de mola.

As uniões das áreas do chassi com a mola estão representadas na Figura 11 pelas linhas vermelhas. Numa das extremidades das molas, existe a conexão com o chassi através das linhas vermelhas, e na outra extremidade da mola é aplicada uma restrição de movimento fixa (deslocamentos fixos).

Figura 11 - Discretização dos contatos rígidos da suspensão com o chassi.



Fonte: Autor (2024).

Dito isto, tendo a intenção de simular as condições mais críticas do equipamento, é necessário conhecer como o mesmo trabalha na realidade. A próxima seção é composta por estas condições e métodos utilizados para a análise computacional por elementos finitos.

3.6 Condições de análise

As análises que se seguem tem como objetivo a avaliação conceitual do chassi, inicialmente empregando cargas nominais, isto é, considerando o equipamento em estado estático. Posteriormente, serão avaliadas condições mais extremas, a fim de possibilitar a avaliação do comportamento do chassi frente a cargas de impacto, assegurando uma avaliação das capacidades estruturais do chassi sob condições críticas. O material do chassi - Aço ASTM A572 G50, que exibe propriedades dúcteis como revisado anteriormente, será analisado sob o critério de Von Mises para identificar potenciais falhas em cada condição testada.

Foram realizadas comparações entre utilizar o recurso de aplicação de força (*Force*) e por *Point Mass* em análises de teste do semirreboque. O recurso de *Point Mass* se tornou o mais recomendado tendo em vista que os resultados das análises pelos dois tipos de aplicação de carregamento não tiveram diferenças atenuadas, levando em consideração que o mesmo é o mais utilizado em análises de estruturas veiculares [LEANDRO, 2019].

Buscando a condição mais crítica do equipamento, será utilizado uma força peso de 25000 Kgf utilizando o recurso *Point Mass*. Para as análises das condições que envolvem a carregadeira CAT 416, será utilizado a aplicação do peso da mesma sob o equipamento, que equivale a 70745,17N de força vertical negativa.

Para os cálculos do fator de segurança (FS) será utilizado a Equação 6. De acordo com LEANDRO (2019), o fator de segurança mínimo recomendado para implementos rodoviários é de 1,7.

Serão analisados os pontos mais críticos de tensões que estiverem presentes na estrutura global. Estes serão posteriormente discutidos na seção de resultados, comparando as condições para encontrar a que maior solicita o chassi do Carrega Tudo por flexão.

3.6.1 Condição 1: Análise 1G - terreno plano

Nesta condição, a análise irá se concentrar na exposição do chassi à força gravitacional padrão de $9,81m/s^2$ (metros por segundo ao quadrado) sem acréscimos de forças dinâmicas adicionais. O objetivo será entender como a estrutura se comporta sob carga estática vertical equivalente à gravidade terrestre. Esta análise servirá como base para comparação com condições mais extremas, sendo crucial para avaliar a integridade estrutural em um estado de repouso ou movimento uniforme.

3.6.2 Condição 2: Análise - 1G ladeira

De acordo com SILVEIRA (2007), vias com inclinações superiores a 15° geralmente são interditadas para tráfego de caminhões, sendo consideradas uma exceção. Neste contexto, o estudo englobará análises sob diferentes angulações de terreno, definindo os pontos críticos da estrutura. As simulações incluirão angulações de 20° para cenários de subida e descida, e 25° para condições de ladeira—valores que superam o limite encontrado na maioria das estradas brasileiras.

Nesta condição o chassi será avaliado em uma ladeira com inclinação de 25°, submetido a força gravitacional que simula a subida ou descida, buscando identificar os pontos críticos de tensão e deformação no chassi, usando simulações para prever onde falhas podem ocorrer devido ao aumento das solicitações mecânicas.

3.6.3 Condição 3: Análise 1G – subida e descida

Nesta análise, o chassi será testado em condições de subida e descida com uma inclinação de 20°. O foco será entender como diferentes angulações afetam o chassi durante a transição de

subida para descida e vice-versa. Essa simulação ajuda a mapear como as forças são redistribuídas ao longo do chassi em condições que imitam as variações topográficas encontradas em rotas com elevações moderadas.

3.6.4 Condição 4: Análise 2G - terreno plano

Baseando-se em análises experimentais de PERES (2006), observa-se que o semirreboque está sujeito a acelerações longitudinais e laterais durante o movimento. Acelerações verticais também são frequentes, principalmente devido às irregularidades do terreno, o que resulta em solicitações predominantes de flexão na estrutura. Conforme observado em estudos experimentais, a aceleração pode atingir até 2G (duas vezes a gravidade) em certas condições, conforme medições de acelerômetros em testes de impacto. Vale destacar que, embora esta medida de aceleração sirva de base inicial para as análises, ela necessita de validação adicional através de testes experimentais mais aprofundados—uma recomendação para futuras investigações que incluiriam mapeamento dessas acelerações in situ.

Essa condição testará o chassi sob uma aceleração vertical de 2G, o que representa uma condição extrema que pode ocorrer durante impactos severos, como passar por buracos ou obstáculos em alta velocidade. O estudo buscará avaliar a resistência do chassi sob cargas acima das condições normais de operação, usando os dados experimentais mencionados anteriormente para embasar a simulação e identificar potenciais falhas estruturais.

3.6.5 Condição 5: Análise 1G – carregadeira CAT 416F2

Para a condição com a carregadeira CAT416F2 carregada no chassi do Carrega Tudo, é considerado seu posicionamento conforme a Figura 12. A mesma foi fotografada próxima ao pátio de uma empresa fornecedora de carroceria de caminhões na cidade de Erechim – RS. Para embasar a configuração de cargas, utilizou-se da disposição dos pneus ao longo da estrutura da Figura 12, que se trata de uma condição real de carregamento do semirreboque em pauta.

Figura 12 - Carregadeira pronta para transporte em um semirreboque Carrega Tudo.



Fonte: Autor (2024).

Dessa forma, conforme a imagem, observa-se que a carga da carregadeira é concentrada, o que pode favorecer um acúmulo mais intenso de tensões em uma região específica do chassi. Em vista disto, definiu-se quais partes do chassi teriam contato direto com a carregadeira. Com a intenção de distribuir as forças de forma realista, a Figura 13 a) expõe como foi aplicada a força peso de 7214kg da carregadeira sobre as vigas. A Figura 13 b) demonstra a esquematização das

condições da análise em questão, identificando o vetor de aceleração e as condições de contorno utilizadas.

Figura 13 - Condições de contorno para a análise da carregadeira CAT 416F2.



a) Região da distribuição da força peso imposta pela carregadeira.



b) Esquema representativo das condições de análise utilizadas.

Fonte: Autor (2024).

O contato rígido entre a carregadeira e as travessas é demonstrado pela cor avermelhada na Figura 13 a). Com a Figura 13 b) é possível identificar os principais pontos de engastes aplicados na análise, bem como a direção da aceleração gravitacional. O centro de gravidade (CG) da carregadeira foi colocado a uma altura correspondente à metade de sua altura total de transporte, com o objetivo de centralizar o peso exercido pela mesma no sentido vertical também, colocandoo na altura de 1788,5mm. O ponto D demonstra a força peso que a carregadeira exerce, que é de 70745,17N.

Dito isso, o capítulo seguinte irá tratar dos resultados que obtiveram as análises propostas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão explorados os resultados das análises realizadas sob diversas condições de carga, detalhando as tensões e deformações para avaliar a integridade estrutural e a conformidade com normas de segurança.

4.1 Malha do chassi

A malha gerada apresenta o modelo do semirreboque em elementos finitos na Figura 14. Conforme mencionado nas seções anteriores, foi utilizado o elemento de casca com elementos do tipo quadrilaterais lineares de tamanho de 10mm.

Figura 14 - Malha final do semireboque em elementos finitos.



Fonte: Autor (2024).

Tratando-se da configuração final da malha gerada do modelo numérico do semirreboque, a mesma teve 65631 nós e 68744 elementos de casca, sendo considerado um bom grau de refinamento, oque assegura uma representação adequada do comportamento da estrutura do chassi.

Com a malha definida, nas próximas seções serão apresentados os resultados dos estudos obtidos através das análises feitas.

4.2 Condição 1: Análise estática vertical (1G)

Para a condição de carregamento estático da gravidade, a Figura 15 se trata do chassi do Carrega Tudo deformado em escala aumentada, apresentando como ele se comporta e sua tendência a se deformar sobre o carregamento de 25000kg.





Fonte: Autor (2024).

Conforme observa-se na Figura 15, a rigidez de uma estrutura é inversamente proporcional aos deslocamentos observados. As áreas com maiores deslocamentos (-27,06 mm a -46,07 mm) são aquelas com menor rigidez estrutural, indicando que essas partes do chassi sofrem maior deformação. A menor deformação na região traseira do pescoço (4,02 mm) indica que esta parte do chassi é mais rígida.

Devido à maior deformação da estrutura estar localizada entre o pescoço e o conjunto da suspensão (molas), observam-se deslocamentos mais elevados nessas áreas. Essa maior deformação ocorre onde a rigidez é reduzida, especialmente nas regiões onde há mudanças na geometria do chassi. Os resultados apresentados evidenciam que essas áreas são mais susceptíveis a deformações significativas sob o carregamento de 25.000 kg, sugerindo a necessidade de reforços estruturais para melhorar a rigidez e a distribuição de cargas ao longo do chassi.

As tensões equivalentes mais críticas, calculadas pelo método de Von Mises são demonstrados na Figura 16 juntamente com seu fator de segurança (FS).



Figura 16 - Fluxo de tensões para condição linear vertical estática.

Fonte: Autor (2024).

Os resultados das áreas com mais solicitação de flexão foram apontados na Figura 16, sendo que, como observa-se na área do engaste do pino rei, o fluxo de tensões está acima do limite de escoamento do material (345MPa). Isso se dá pelo fato desta região ser uma área com simplificações geométricas e de restrições na análise, dadas por representações de soldas no tratamento da geometria, apresentando singularidades de tensão. Para o objetivo do trabalho, essa região não é objeto de análise localmente, por isso as simplificações aplicadas atendem ao objetivo de entender o comportamento da estrutura. Cabe salientar, que para análises mais refinadas, essa região pode ser mais bem modelada, buscando uma melhor representação de acordo com a estrutura real.

Desta forma, levando em consideração que a finalidade da análise estrutural do presente estudo é avaliar o comportamento global do chassi, caracterizado por flexão, desconsidera-se a necessidade de atenção para estes pontos de singularidades nestas regiões.

No entanto, a análise estática linear teve os pontos mais críticos na região superior da estrutura (união do pescoço à geometria do corpo do chassi) de 174MPa e 172MPa, com coeficientes de segurança de 1,98 e 2, respectivamente. Também surgiram pontos críticos nas áreas próximas ao centro de gravidade. Eles foram de 95MPa em um ponto da cinta superior e 175MPa em uma região da cinta inferior da longarina principal.

Para a região inferior do chassi, encontraram-se valores de tensões maiores. Elas são mostradas na Figura 17.



Figura 17 - Fluxo de tensões presentes na parte inferior do chassi.

Fonte: Autor (2024).

As áreas mais críticas na geometria do pescoço do chassi apresentaram valores de tensões que exigiram uma atenção maior, principalmente na área mais crítica, que foi de 235MPa, com fator de segurança próximo a 1,46, ficando inferior do limite recomentado de 1,7. Onde estão presentes os reforços das cintas inferiores, o maior valor foi de 182MPa, com FS=1,9. Outras regiões críticas com 168MPa e 104MPa também foram observadas.

Dado estes valores, será avaliado o comportamento para condições de terrenos angulares na próxima seção.

4.2 Condição 2: Análise 1G - subida e descida

Partindo para a análise computacional do chassi com um terreno angular, diferentemente da condição analisada anteriormente que considerava o terreno plano, obtiveram-se resultados diferentes a respeito da condição de subida e descida.

A seguir será demonstrado na Figura 18 a) e Figura 18 b) os maiores pontos de tensões equivalentes calculadas pelo método de Von Mises pelo *software* que surgiram durante a análise na condição de subida, aplicando a carga de 25000kg.



Figura 18 - Fluxo de tensões para terreno angular de 20° na subida.

a) Região superior da estrutura.



b) Região inferior da estrutura.

Fonte: Autor (2024).

Com a condição de subida o chassi começa a apresentar regiões mais críticas, apresentando áreas em que o coeficiente de segurança chega a 1,4 no mesmo ponto em que a análise estática linear. Esta área apresenta uma redução notável em sua seção transversal e está situada entre o

ponto onde as cargas são aplicadas e o local onde as restrições são impostas pelo sistema de suspensão traseiro, explicando o grande acúmulo de tensões.

Durante a subida, as forças devido ao peso do semirreboque e da carga que ele transporta tenderam a atuar mais intensamente contra a direção de movimento devido à gravidade. Essa ação resultou em um aumento das tensões na parte traseira do chassi, onde o peso é mais sentido. Ainda, a força gravitacional puxando a carga para trás causou tensões elevadas nas conexões das longarinas principais com o pescoço do chassi, pois essas áreas trabalham para manter a integridade estrutural frente à tentativa da carga de se mover para trás.

Na análise de subida, com angulação de 20°, encontrou-se um ponto crítico com uma tensão de 244MPa, ficando abaixo do fator mínimo de segurança, com FS=1,41, conforme a Figura 18 b).

Foram realizadas as análises no terreno de descida com 20° e notou-se que nesta condição as tensões foram inferiores comparadas ao terreno com angulação positiva. A Figura 19 a) e Figura 19 b) constam os resultados das tensões obtidos através desta condição de análise.



Figura 19 - Fluxo de tensões para terreno angular de 20° na descida.

a) Região superior da estrutura.



b) Região inferior da estrutura.

Fonte: Autor (2024).

No terreno de descida, em decorrência das forças gravitacionais ajudarem a mover a carga, o estresse nas longarinas e no pescoço tendem a reduzir porque a carga tende a se assentar mais firmemente contra a plataforma do semirreboque, distribuindo o peso mais uniformemente ao longo do chassi.

Em um ponto onde o coeficiente de segurança na análise com terreno em descida foi de 5,75, considerado um valor elevado em comparação aos demais valores, observou-se que o acúmulo de tensões nessa região reduziu drasticamente em relação à tensão no mesmo ponto durante a análise de subida. Especificamente, no ponto da análise de subida, registrou-se uma tensão de 104 MPa com FS=3,31.

Conclui-se que a mudança na angulação do terreno faz com que essa região se deforme menos por flexão. Esse comportamento é observado em outros pontos da estrutura, evidenciando que o terreno de subida apresenta mais regiões críticas. Isso é confirmado pelas médias das tensões analisadas, que são 169,25MPa para a subida e 138MPa para a descida.

A seguir serão apresentados os resultados para a análise do chassi em condição de ladeira.

4.3 Condição 3: Análise 1G ladeira

Nesta condição inicial de análise do comportamento do chassi em terreno com angulação de 25° simulando uma ladeira, é possível estimar os principais pontos de tensões quando ele está em torção sob a carga de 25000kg. A Figura 20 mostra a deformação direcional do chassi sob esta condição.



Figura 20 - Deformação do chassi sob condição de ladeira.

Fonte: Autor (2024).

Conforme a Figura 20, as regiões em vermelho dizem respeito a transferência de carga para os locais em que mais houve solicitação por torção, representando um comportamento diferente das outras análises realizadas. Dessa forma, neste caso de análise de ladeira com inclinação de 25°, cria-se um momento torcional significativo devido à assimetria da força peso e reação de terreno. Isto é evidenciado na Figura 20, que em um lado apresenta um deslocamento positivo de 86,37mm e de outro um deslocamento negativo de -164,82mm. Na região traseira do chassi a torção também é um fato, tendo uma diferença de -66,35mm entre os dois lados das travessas.

A Figura 21 a) e a Figura 21 b) representam os maiores valores de tensões encontrados sob o comportamento observado na estrutura global.



Figura 21 - Fluxo das tensões mais críticas em ladeira.

a) Seção traseira superior do chassi.



b) Região do pescoço do chassi.

Fonte: Autor (2024).

Dado estes valores, devido ao grau de inclinação de 25°, observou-se picos de tensões no lado esquerdo (do ponto de vista superior) da estrutura do Carrega Tudo. Isso resulta em uma maior concentração de tensões no lado esquerdo do chassi, que é o lado mais alto na ladeira, devido ao deslocamento do centro de gravidade e à ação combinada dos momentos de flexão e torção gerados pela inclinação.

Com isso, tendo como objetivo avaliar a condição mais crítica do chassi, serão apresentados na próxima seção os resultados advindos da análise com uma aceleração de 2G aplicada ao semirreboque.

4.4 Condição 4: Análise 2G terreno plano

Para esta condição considerou-se simular uma carga de impacto oriunda de estudos experimentais mencionados anteriormente na seção metodológica do estudo. A aceleração utilizada foi de 19620 mm/s^2 no sentido positivo do eixo Y. Destaca-se que para esta análise não

foram aplicadas cargas e/ou forças pesos, visando analisar o comportamento da estrutura global sob uma carga de aceleração exclusivamente.

Sabe-se que, por meio da aplicação desta aceleração, esta análise revelará o comportamento do semirreboque sob condições extremas. A Figura 22 a) e a Figura 22 b) apresentam o fluxo de tensões presente na estrutura global utilizando o método de Von Mises pelo *software ANSYS*®.



Figura 22 - Fluxo de tensões críticas sob análise de 2G.

a) Região superior do chassi.



b) Região inferior do chassi.

Fonte: Autor (2024).

A análise 2G revelou um comportamento com maior fluxo de tensões nas cintas inferiores das longarinas principais quando comparadas às demais condicões de análise. Isso se deve à aceleração vertical aplicada. Essa aceleração também aumenta a solicitação no pescoço do chassi, apresentando valores de tensão de até 381MPa, com FS crítico de 0,9.

Ainda, conforme a Figura 22 a), observou-se que a carga de impacto aplicada acabou gerando tensões nas cintas superiores das longarinas principais também, registrando valores de 270MPa em seus picos mais altos, além de novas áreas de transferência de cargas, apontadas pelos

balões na Figura 22 a). Um ponto em uma região que apresentou uma nova área de tensão na geometria da alma da longarina do pescoço apresentou tensão de 133MPa com FS 2,59.

Isso configura a necessidade de um modelamento de um novo formato de chassi, visando a redução dos níveis de tensões concentradas nestas regiões. Como o objetivo deste estudo é unicamente a análise conceitual do chassi, continuarão as análises na próxima seção para a condição da carregadeira carregada no modelo geométrico, sendo esta uma carga concentrada nas vigas.

4.5 Condição 5: Análise carregadeira

Partindo para a análise do chassi com a força peso concentrada da carregadeira sobre o mesmo, encontraram-se pontos em que a estrutura apresentou maior acúmulo de tensões. A força aplicada em Newtons foi equivalente a 70770N aproximadamente. Isso é mostrado na Figura 23 a) e Figura 23 b).





b) Região inferior do chassi.

Fonte: Autor (2024).

As tensões máximas encontradas nas análises variam de 47 MPa a 110 MPa, com fatores de segurança que vão de 3,13 a 7,34. Estes resultados indicam que, sob a força peso concentrada da carregadeira, o chassi do semirreboque possui uma margem de segurança considerável em todas as regiões analisadas.

Notou-se por meio dos resultados encontrados, possibilidades que permitiram a avaliação estrutural do chassi buscando condições críticas para determinar a resistência estrutural do mesmo. No entanto, a presença de um alto fluxo de tensões sob a geometria do pino rei é um ponto crítico que, devido as simplificações geométricas na quantidade de elementos e detalhes, resultaram em pontos com maior solicitação por flexão.

Com a intenção de representar os comportamentos específicos de cada análise que foram testadas sob diferentes condições, criou-se o Gráfico 1 para facilitar a identificação de padrões e comportamentos da variação de tensões em função do fator de segurança. O FS utilizado para parâmetro foi de 1,7, sendo representado no Gráfico 1 pela linha tracejada. Os valores de tensões que precedem a linha, ficaram abaixo do limite mínimo exigido para o estudo.



Gráfico 1 - Comparação das análises.

Fonte: Autor (2024).

As tensões variam significativamente entre as diferentes condições de carga. As situações de Ladeira e Estática (2G) apresentam as maiores tensões, especialmente para fatores de segurança menores. Na condição de ladeira, a transferência de tensões adicionais para um lado do chassi causada pela torção, resulta em uma concentração significativa de tensões, particularmente nas regiões de transição entre as longarinas e as travessas. A análise 2G também se mostrou crítica, com amplas áreas de tensões elevadas distribuídas pela estrutura, conforme visto na Figura 22 a) e Figura 22 b).

O gráfico 1 ilustra que, em termos de coeficiente de segurança, a condição de ladeira é a mais crítica, com tensões superiores a 500 MPa para fatores de segurança abaixo de 2. As condições Estática (1G) e Estática (2G) exibem uma diminuição acentuada nas tensões à medida que o fator de segurança aumenta. A condição de Ladeira, destacada em rosa, evidencia tensões iniciais muito altas, refletindo a criticidade dessa situação devido à concentração de tensões por torção. Em contraste, a condição Carregadeira, representada em laranja, apresenta tensões significativamente menores, especialmente para fatores de segurança superiores a 3.

Recomenda-se utilizar algumas possibilidades de reforços na estrutura a respeito dos resultados obtidos na condição crítica (ladeira), com a intenção de diminuir a solicitação de tensões

nas áreas analisadas. O Quadro 4 apresenta essas possibilidades, juntamente com a descrição das alterações que são propostas.

Possibilidade	Descrição	Alteração	
1	Uso de perfis maiores para as longarinas e travessas, aumentando a altura e espessura da alma e das abas.	Alterar de W610x101.0 para W610x125.0 nas longarinas e de W410x46.1 para W410x54.0 nas travessas do tipo 1.	
2	Incorporação de placas de reforço ou contraventamentos nas regiões de alta tensão, espalhando melhor a carga.	Soldar placas adicionais nas laterais ou na base dos perfis existentes, especialmente nas junções e nas regiões com tensões máximas.	
3	Reavaliação do design para assegurar que os caminhos de carga sejam diretos, evitando concentrações de tensão.	Implementar transições suaves entre seções, adicionar filetes e evitar cantos agudos e mudanças súbitas na seção dos perfis.	
4	Uso de um material com maior resistência ao escoamento.	Substituir o aço ASTM A572 G50 pelo ASTM A992, que possui maior resistência e ductilidade, proporcionando melhor desempenho sob as mesmas condições de carga.	

Quadro 4 - Proposições para reforços no chassi.

Fonte: Autor (2024).

A partir do Quadro 4, sugeriu-se o aumento do módulo de seção dos perfis, a adição de reforços, transições entre seções e uma atualização do material. Com isso em mãos, o trabalho encaminha-se para o fechamento com a seção conclusiva sobre as análises feitas.

5 CONCLUSÕES

Em conclusão, o modelo numérico do chassi do semirreboque foi confeccionado no ANSYS® *SpaceClaim*, utilizando a ferramenta *midsurface* para transformar sólidos em superfícies médias. Simplificações foram feitas para representar as soldas como elementos de casca, corrigindo as falhas de contato no processo. A malha foi gerada com elementos quadrilaterais lineares de 10mm, garantindo eficiência computacional sem comprometer a precisão estrutural.

O estudo utilizou diversas simulações de condições de carga e uso no software *ANSYS*® para avaliar o comportamento do chassi do semirreboque Carrega Tudo. As principais condições de contorno foram definidas e analisadas, incluindo acelerações longitudinais e verticais, diferentes angulações de terreno, e a aplicação de cargas específicas, como a da carregadeira CAT 416F2.

A análise de 2G revelou maior solicitação de flexão no chassi, com tensões significativas nas cintas inferiores das longarinas principais e no pescoço do chassi, atingindo até 381 MPa. A análise de subida e descida com inclinação de 20° e 25° mostrou redistribuições das forças e concentração de tensões. A subida foi mais crítica, com tensões de até 245 MPa e FS=1.4, enquanto a descida apresentou um coeficiente de segurança maior e menor tensão acumulada.

A carga concentrada da carregadeira resultou em tensões variando de 47 MPa a 110 MPa, com fatores de segurança adequados (3,13 a 7,34), demonstrando uma boa margem de segurança estrutural.

As análises mostraram que as condições de impacto e flexão são críticas para a estrutura, destacando a necessidade de reforço em áreas específicas do chassi para evitar falhas estruturais sob condições extremas.

Para futuros trabalhos, recomenda-se medições experimentais para obtenção das reais condições de carregamento às quais a estrutura está submetida nas diversas condições de trabalho, que incluem frenagens, arrancadas bruscas, entre outros impactos. Também se sugere uma análise de fadiga para uma estimativa de vida útil da estrutura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agência Internacional de Energia (IEA), 2023. *Brazil Freight and Logistics Market SIZE* & SHARE ANALYSIS - GROWTH TRENDS & FORECASTS UP TO 2030. Disponível em: https://www.mordorintelligence.com/industry-reports/brazil-freight-logisticsmarket-study. Acesso em: 26 de junho de 2024.

ALVES FILHO, Avelino. Elementos finitos: A base da Tecnologia CAE. 6 a ed. São Paulo: Érica, 2009.

ALLGAYER, A. A. Aço ASTM A36: Propriedades Mecânicas e Composição Química, 2017. p. 35-36.

ANSYS. *Equivalent Stress*, 2010. Disponível em: https://courses.ansys.com/wp-content/uploads/2019/04/1.3.4-Equivalent_-Stress-_-rebranded.pdf. Acesso em: 12 de novembro de 2023.

AZEVEDO, M. F. ÁLVARO. Método dos Elementos Finitos, 2003. p. 60-62.

BALESTRERI, J. GERSON. Análise Estrutural de um Chassi Semirreboque para Caçamba Basculante, 2020. p. 132-133.

CALLISTER, W. D., & RETHWISCH, D. G. *Materials Science and Engineering*, 2014. p. 47-52.

Caterpillar, Catálogo de Máquinas – **Carregadeira CAT Modelo 416F2** (**Especificações Técnicas**), 2023. Disponível em: https://www.cat.com/pt_BR/products/new/equipment.html. Acesso em: 4 de novembro de 2023.

CONTRAN. **Resolução** N° 211 de 13 de novembro de 2006. Disponível em https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transito/conteudo-contran/resolucoes/cons211.pdf. Acesso em: 09 de novembro de 2023.

DA SILVEIRA, L. FERNANDO. Inclinações das ruas e das estradas, 2007. p. 1-2.

DE TROYA, M. A. S., TORTORELLI, D. A. Adaptative mesh refinement in stressconstrained topology optimization", Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 58, n. 6, 2018. pg. 2369-2386.

DNIT. **Resolução N°1, de 8 de janeiro de 2021**. Disponível em: https://www.gov.br/dnit/ptbr/central-de-conteudos/atos-normativos/tipo/resolucoes/resolucao-1-2021-dir-alteradacompublicacao.pdf. Acesso em: 15 de outubro de 2023.

DUARTE FILHO, A. L. Análise estática e dinâmica, linear e não-linear geométrica, através de elementos hexaédricos de oito nós com um ponto de integração, 2002. p. 28-31.

FISH, J. J; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2009. p. 89-93.

FRETEBRAS – **8 Edição (Relatório)**, 2022. Disponível em: https://static.poder360.com.br/2022/09/fretebras-_-relatorio-8.pdf. Acesso em: 01 de outubro de 2023.

HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7 a ed. São Paulo: Pearson, 2012. p 222-223.

KOHLER, L. L. Estudo de Cargas em um Semirreboque Carrega Tudo Utilizando Métodos Numéricos e Análise Experimental, 2018. p. 77-82.

LEANDRO, M. VINICIUS. Análise Estrutural de um Chassi de Semirreboque pelo Método de Elementos Finitos, 2019. p. 44-47.

OLIVEIRA, G. C. FERNANDO. Contribuição ao Desenvolvimento de uma Estrutura Veicular Tipo Spaceframe Usando o Método dos Elementos Finitos e Métodos Heurísticos de Otimização Numérica, 2007. p. 29-34.

PERES, Gustavo. "**Uma metodologia para simulação e análise estrutural de veículos de transporte de carga**". Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, UFRGS, 2006. p. 19-22.

RANDOM.CarregaTudo,2023.Disponívelem:https://www.randon.com.br/pt/produtos/linha-pesada/carrega-tudo/carrega-tudo-hd/.Acessoem:6 de novembro de 2023.

Rocha, F. K. **Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular**, UFSC, 2004. p. 54-56.

SHIGLEY, J. E. Elementos de Máquinas, 2016. p. 110-125.

SOLIDWORKS. Critério de Tensão de Von Mises Máxima, 2016. Disponível em: https://help.solidworks.com/2016/portuguesebrazilian/solidworks/cworks/r_Maximum_von_Mis es_Stress_Criterion.html. Acesso em: 05 de novembro de 2023.

SOLIDWORKS. *Linear Static Analysis in SOLIDWORKS Simulation Standard*, 2014. Disponível em: https://blogs.solidworks.com/solidworksblog/2014/08/linear-static-analysis-in-solidworks-simulation-standard.html. Acesso em: 09 de maio de 2024.

ZIENKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 2000. p. 117-121.